

**Barem clasa a VIII-a**  
**(OLM 2015-etapa locală)**

**Of. 10 p**

**Subiectul I. (30 puncte)**

a) Din  $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab+bc+ac) \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 = 27$  (5 p)

Cum  $(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 = 2(a^2 + b^2 + c^2) - 2(ab+bc+ac) = 2 \cdot 27 - 2 \cdot 27 = 0$  (5 p)

**Deci**  $a-b=b-c=c-a \Rightarrow a=b=c$

Din  $a+b+c=9$  și  $a=b=c \Rightarrow a=b=c=3 \Rightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 3 \cdot \frac{1}{3} = 1 \in \mathbb{N}$  (5 p)

b) Pornind de la egalitatea :  $(n-1) \cdot n \cdot (n+1) = n^3 - n$  , suma  $S$  devine :

$$S = 2^3 - 2 + 3^3 - 3 + 4^3 - 4 + \dots + n^3 - n = 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \dots + n^3 - (1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n) =$$

$$= \frac{n \cdot (n+1)}{2} \cdot \frac{(n-1) \cdot (n+2)}{2} \Rightarrow S = \frac{(n-1) \cdot n \cdot (n+1) \cdot (n+2)}{4} .$$
 (5 p)

a). Dacă  $n = 100$  , avem  $S = \frac{99 \cdot 100 \cdot 101 \cdot 102}{4} = \frac{(100-1) \cdot (100+1) \cdot 10200}{4} = 9999 \cdot 2550 = 25497450$  (5 p)

b). Dacă  $S = 89700 \Rightarrow \frac{(n-1) \cdot n \cdot (n+1) \cdot (n+2)}{4} = 89700 \Rightarrow (n-1) \cdot n \cdot (n+1) \cdot (n+2) = 4 \cdot 89700 =$   
 $= 2^2 \cdot 2^2 \cdot 5^2 \cdot 3 \cdot 13 \cdot 23 = 23 \cdot (2^3 \cdot 3) \cdot 5^2 \cdot (2 \cdot 13) = 23 \cdot 24 \cdot 25 \cdot 26 \Rightarrow n = 24.$  (5 p)

**Subiectul II. (20 puncte )**

Desen corect

(5 p)

Trasăm  $AO \perp (BCD) \Rightarrow AO \perp BC, BC \perp AD \Rightarrow BC \perp (DAO) \Rightarrow BC \perp DO$  (1)

$T3 \perp \Rightarrow AE \perp BD$  și  $AF \perp DC$

(5 p)

Din congruența triunghiurilor  $AED$  și  $AFD \Rightarrow [ED] = [DF]$

Din congruența triunghiurilor  $DOE$  și  $DOF \Rightarrow m(\angle ODE) = m(\angle ODF) \Rightarrow [DO \text{ bisectoare}]$  (2)

Din (1) și (2)  $\Rightarrow \triangle BCD$  isoscel  $\Rightarrow BD = DC$  (5 p)

Din congruența triunghiurilor  $ABD$  și  $ACD \Rightarrow [AB] = [AC] \Rightarrow \triangle ABC$  isoscel. (5 p)

**Subiectul III. (20 puncte )**

Notăm cu  $AA'$ , respectiv  $DD'$  cele două perpendiculare din  $D$  și respectiv  $A$  pe dreapta  $MG$ .

Atunci  $AA' = DD' \Rightarrow \frac{AA' \cdot MG}{2} = \frac{DD' \cdot MG}{2} \Rightarrow A_{AMG} = A_{DMG}.$  (3 p)

Justificăm faptul că triunghiurile  $MDG$  și  $MAG$  sunt dreptunghice. (2 p)

Atunci  $A_{AMG} = A_{DMG} \Rightarrow \frac{MD \cdot DG}{2} = \frac{MA \cdot AG}{2} \Rightarrow MD \cdot DG = MA \cdot AG$  (5 p)

Notăm  $AM = x$  și  $AD = a$ .

Folosim TFA în triunghiul  $EDG \Rightarrow \frac{CG}{GD} = \frac{FC}{ED} \Rightarrow \frac{CG}{GD} = \frac{a}{3} : \frac{a}{2} \Rightarrow CG = 2CD \Rightarrow CG = 2a$  (2 p)

Folosim Teorema lui Pitagora în triunghiul dreptunghic  $ADG \Rightarrow AG = a\sqrt{10}.$  (2 p)

Folosim Teorema lui Pitagora în triunghiul  $MAD \Rightarrow MD = \sqrt{a^2 + x^2}$  (2 p)

Deoarece  $A_{AMG} = A_{DMG} \Rightarrow MA \cdot AG = MD \cdot GD \Rightarrow x \cdot a\sqrt{10} = 3a \cdot \sqrt{a^2 + x^2} \Rightarrow$

$x \cdot \sqrt{10} = 3\sqrt{a^2 + x^2} \Rightarrow x^2 \cdot 10 = 9(a^2 + x^2) \Rightarrow x^2 = 9a^2 \Rightarrow x = 3a$  (4 p)

**Subiectul IV. (20 puncte )**

$$a = \left(x + \frac{3}{2} + y - \frac{1}{2}\right) \left(x + \frac{3}{2} - y + \frac{1}{2}\right) = (x + y + 1)(x - y + 2) = x^2 - y^2 + 2(x + y) + x - y + 2 = x^2 + x -$$

a)  $y^2 + y + 2x + 2 = x(x + 1) - y(y - 1) + 2(x + 1)$

= nr. întreg par, deoarece fiecare din cei trei termeni sunt numere pare.

**(10 p)**

b)  $a = (x + y + 1)(x - y + 2)$ . Din 1) rezulta ca  $a$  este nr. par, de unde  $a$  este prim dacă și numai dacă  $a = 2$ .

Avem următoarele cazuri:

$$x + y + 1 = 1 \text{ și } x - y + 2 = 2 \Leftrightarrow x = 0, y = 0;$$

$$x + y + 1 = -1 \text{ și } x - y + 2 = -2 \Leftrightarrow x = -3, y = 1;$$

$$x + y + 1 = 2 \text{ și } x - y + 2 = 1 \Leftrightarrow x = 0, y = 1;$$

$$x + y + 1 = -2 \text{ și } x - y + 2 = -1 \Leftrightarrow x = -3, y = 0;$$

Astfel:  $S = \{(-3, 0); (-3, 1); (0, 0); (0, 1)\}$ .

**(10 p)**